39ο ΓΕΛ ΑΘΗΝΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

Σχ. Έτος 2017 – 2018

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ, και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) = g(x) + c$ **Μονάδες 7**

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

«Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ τότε και η f ΄ έχει πεδίο ορισμού το ίδιο διάστημα Δ»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό με Α αν είναι αληθής και με Ψ αν είναι ψευδής (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.** (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής και να κατασκευάσετε το κατάλληλο σχήμα. **Μονάδες 4**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R^*

β) Αν υπάρχει το όριο $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ΄ ανάγκη υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$

γ) Έστω f συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$. Τότε θα ισχύει $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

δ) Κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

ε) Έστω f συνεχής στο διάστημα [α,β] και $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε θα ισχύει ότι $\int_\beta^\alpha f(x)dx>0$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$, $x\neq -1$.

Β1. Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας **Μονάδες 6**

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 8**

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τις ασύμπτωτες και να τη σχεδιάσετε **Μονάδες 5**

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=ln2 **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$, με $f^2(x)=2f(x)+x^4-1$, $x\geq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x^2}=1$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+1$, $x\geq 0$. **Μονάδες 7**

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} **Μονάδες 5**

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left[\left(f^{-1}(x)-3\right)\left(f^3(x)-2f^2(x)\right)\right]'=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα **Μονάδες 6**

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f^{-1}(\ln x)}{\ln x}<\dfrac{f^{-1}(x-1)}{x-1}$, για κάθε $x\in[e,3]$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R^*\to R$, τέτοια ώστε f(1)=e, $f(-1)=-\dfrac{1}{e}$ και $x\cdot f'(x)-f(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$ για κάθε $x\neq 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ για κάθε $x\neq 0$ **Μονάδες 6**

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$. **Μονάδες 6**

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη (ε) της γραφικής παράστασης C_f της f στο $+\infty$ και να δείξετε ότι η C_f της f βρίσκεται πάνω από την (ε) στο διάστημα $(0,+\infty)$ **Μονάδες 6**

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένας αριθμός $x_0\in(1,3)$ τέτοιος ώστε

$f(x_0)=(3-x_0)\cdot\int_1^2 f(t)dt$ **Μονάδες 7**

Αθήνα 2 Μαΐου 2018

Η ομάδα των Μαθηματικών του 39ου ΓΕΛ Αθηνών